ЛЕКЦИЯ 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

§1 Системы линейных уравнении

п.1 Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.11)$$

где

a_{ij}, $\left(i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n}\right)$ - называются коэффициентами системы;

b_i - свободными членами или правая часть системы;

x_j - неизвестные числа, подлежащие определению.

Такую систему удобно записывать в компактной матричной форме

$$A \cdot X = B,$$

здесь A – матрица коэффициентов системы, называется *основной матрицей*;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец из неизвестных x_j;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$ - вектор-столбец из свободных членов b_i.

Произведение матриц $A \cdot X$ определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (n штук).

Расширенной матрицей системы называется матрица $\overline{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, …, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$X=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$$

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему — это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным*.

п.2 Решение произвольных систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

Ответ на вопрос о совместности системы дает *теорема Кронекера-Капелли.*

Теорема 5.1 Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Правила же практического разыскания всех решений совместной системы линейных уравнений вытекают из следующих теорем.

Теорема 5.2 Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема 5.3 Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Алгоритм решения произвольной системы линейных уравнений.

1 Вычислить ранги основной и расширенной матриц системы. Если $r\,(A) \neq r\,(\overline{A})$, то система несовместна.

2 Если $r(A) = r(\overline{A}) = r$, система совместна. В этом случае необходимо найти какой-либо базисный минор порядка r (напоминание: минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют *главными* (или *базисными*) и оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.

3 Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.

4 Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

п.3 Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная порядка n. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной*.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части матричного уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Поскольку

$$A^{-1} \cdot A = E \quad \text{и} \quad E \cdot X = X,$$

то

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{2.12}$$

Отыскание решения системы по формуле (2.12) называют *матричным методом* решения системы линейных уравнений.

Матричное равенство (2.12) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует , что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ .$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta}$$

Но $A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + A_{n1} \cdot b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Итак,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Аналогично,

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где Δ_2 получен Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов;

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \boldsymbol{i} = 1,2,3,\dots,n \tag{2.13}$$

называются *формулами Крамера.*

Итак, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено матричным способом (2.12) либо по формулам Крамера (2.13).

п.4 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является *метод Гаусса,* состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.14}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности, треугольному) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

где $k \leq$ n, $a_{ij} \neq 0$, $r = k$. Коэффициенты a_{ij} называются главными элементами системы.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

Прямой ход метода Гаусса.

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (2.14), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого (используя элементарные преобразования системы). Для этого умножим обе части первого уравнения на $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_k + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}$, $b_{ij}^{(1)}$ $(i, j = \overline{2, m})$ - новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы (2.14) к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, т. е. равенства вида 0 = 0, их отбрасывают. Если же появится уравнение вида $0 = b_i$, а $b_i \neq 0$, то это будет означать несовместность системы.

Второй этап (*обратный ход*) заключается в решении ступенчатой системы. Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$; затем находим $x_{k-2}, \ldots, x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество частных решений системы.

Замечание 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т. е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее, поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $(x_{n-2}, \dots, x_n)$.

Замечание 2. На практике удобнее работать не с системой (2.14), а с расширенной матрицей системы $\overline{A}$, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (уравнения перестает местами, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 1$).

п.5 Системы линейных однородных уравнений

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2.15)$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна ($r(A) = r(\overline{A})$), т.к. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является ее нулевым (тривиальным) решением.

При каких условиях однородная система имеет и ненулевые решения?

Теорема 5.4 Для того, чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы A был меньше числа n неизвестных, т.е. $r(A) < n$.

Доказательство необходимости.

Так как ранг не может превосходить размера матрицы, то, очевидно, $r \leq n$. Пусть $r = n$. Тогда один из миноров размера $n \times n$ отличен от нуля. Поэтому соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} = 0$, т.к. $\Delta \neq 0$, а все $\Delta_i = 0$. Значит, других, кроме тривиальных, решений нет. Итак, если есть нетривиальное решение, то $r < n$.

Доказательство достаточности.

Пусть $r < n$. Тогда однородная система, будучи совместной, является неопределенной. Значит, она имеет бесчисленное множество решений, т. е. имеет и ненулевые решения.

Пусть дана однородная система n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Теорема 5.5 Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ был равен нулю, т. е. $\Delta = 0$.

Если система имеет ненулевые решения, то $\Delta = 0$. Ибо при $\Delta \neq 0$ система имеет только единственное, нулевое решение. Если же $\Delta = 0$, то ранг r

основной матрицы системы меньше числа неизвестных, т. е. $r < n$. И, значит, система имеет бесконечное множество (ненулевых) решений.